

Table des matières

1 Propagation dans le vide	1
1.1 Équation de propagation dans le vide	1
1.2 L'onde plane progressive	2
1.3 L'onde plane progressive monochromatique	4
1.4 Structure de l'onde plane progressive harmonique	4
1.5 Relation de dispersion	6
1.6 Aspects énergétiques de l'OPPM	6
1.7 Polarisation des ondes planes	7
2 Propagation dans un conducteur ohmique	8
2.1 Électroneutralité du conducteur et ARQS magnétique	8
2.2 L'effet de peau	9
2.3 Aspects énergétiques	10
3 Propagation d'une onde transverse dans un plasma dilué	12
3.1 Propagation dans un plasma	12
3.2 Déformation du paquet d'onde	14
4 Champ électromagnétique rayonné par un dipôle oscillant dans la zone de rayonnement	17
4.1 Position et hypothèses du problème	17
4.2 Bilan énergétique	18

1 Propagation dans le vide

1.1 Équation de propagation dans le vide

1.1.1 Le Laplacien vectoriel

On rappelle la définition l'opérateur **laplacien scalaire** qui, appliqué a une fonction scalaire, est défini par

$$\Delta f(M) = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(f(M))) .$$

En coordonnées cartésiennes, le laplacien s'écrit

$$\Delta f(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(M) .$$

Définition. On définit l'opérateur **laplacien vectoriel** qui, appliqué à une fonction vectorielle, est défini par

$$\overrightarrow{\Delta} \vec{A}(M) = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\text{div} \vec{A}(M) \right) - \overrightarrow{\text{rot}} \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}(M) \right) .$$

En coordonnées cartésiennes, le laplacien vectoriel s'écrit, en notant $\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z$,

$$\overrightarrow{\Delta} \vec{A}(M) = \Delta A_x(M) \vec{e}_x + \Delta A_y(M) \vec{e}_y + \Delta A_z(M) \vec{e}_z .$$

Les relations de ces définitions sont admises mais peuvent être retrouvées après un calcul un peu laborieux.

1.1.2 Équation de d'Alembert

Plaçons nous dans le vide, les équations de Maxwell s'écrivent

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (1.3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (1.4)$$

Calculons le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday (1.4), il vient

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{E}) = -\operatorname{rot} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right).$$

Le théorème mathématique de Schwarz indique que, si une fonction est deux fois dérivable, alors les dérivées partielles peuvent s'effectuer dans n'importe quel ordre. En dehors des sources du champ, les composantes du champ sont au moins deux fois dérivables. En effet, par le principe de Curie, une non dérivabilité impliquerait une discontinuité devant être causée par une discontinuité locale du milieu, ce qui n'est pas le cas dans le vide. Donc le théorème de Schwarz s'applique. On peut donc inverser les dérivées spatiales et temporelles du champ magnétique.

Il vient

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{B}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

L'équation de Maxwell-Gauss (1.1) indiquant que $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, il vient par définition du Laplacien vectoriel

$$-\vec{\Delta} \vec{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

De même pour le champ magnétique, à l'aide des équations de Maxwell-Ampère (1.2) et Maxwell-Thomson (1.3), il vient

$$-\vec{\Delta} \vec{B} = \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{B}) = \operatorname{rot} \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{E}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}.$$

Propriété. Dans le vide, les champs électriques et magnétiques vérifient l'équation de propagation de d'Alembert

$$\boxed{\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{\Delta} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}}.$$

On rappelle que la vitesse de la lumière dans le vide vaut $c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$ et vérifie la propriété

$$\boxed{\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1}.$$

On note parfois l'opérateur d'Alembertien $\square \vec{A} = \vec{\Delta} \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$.

1.2 L'onde plane progressive

1.2.1 Solutions de l'équation de d'Alembert

Considérons un champ se propageant le long d'une direction fixe. Quitte à opérer une rotation du repère, on peut supposer que cette direction est portée par l'axe x . On écrit alors $\vec{E}(M, t) = \vec{E}(x, t)$.

L'opérateur Laplacien se réduit alors à $\vec{\Delta} \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2}$. Chaque coordonnée du vecteur vérifie donc l'équation de d'Alembert scalaire

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

Posons les variables $u = x - ct$ et calculons les dérivée de f par rapport à x et t . On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(u) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u}(u) = \frac{\partial f}{\partial u}(u) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial t}(u) = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial u}(u) = -c \frac{\partial f}{\partial u}(u) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(u) = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u).$$

On en déduit que $f(u)$ vérifie l'équation de d'Alembert scalaire, quelle que soit la forme de f .

De même, on pose $v = x + ct$ et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(v) = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v}(v) = \frac{\partial f}{\partial v}(v) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(v) = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(v)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial t}(v) = \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial v}(v) = +c \frac{\partial f}{\partial v}(v) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(v) = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(v).$$

On en déduit que $f(v)$ vérifie l'équation de d'Alembert scalaire, quelle que soit la forme de f .

Comme cela est vrai pour toutes les coordonnées, c'est vrai pour les champ. De plus, l'équation différentielle d'ordre 2 admet deux solutions qui génère l'ensemble des solutions.

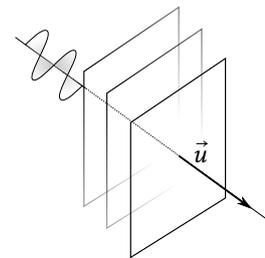
Dans le cas d'une propagation unidimensionnelle en coordonnées cartésiennes x dans le vide, les champs peuvent s'écrire sous la forme d'une somme de deux ondes planes progressives se propageant dans des directions opposées à la vitesse c

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_1(x - ct) + \vec{E}_2(x + ct) \quad \text{et} \quad \vec{B}(x, t) = \vec{B}_1(x - ct) + \vec{B}_2(x + ct).$$

On rappelle qu'une surface d'onde est un plan sur lequel tous les états vibratoires sont en phase, on les appelle aussi surfaces équiphase. Dans le cas qui nous intéresse, à x fixé, les champs sont identiques. Ces plans sont orthogonaux à \vec{e}_x .

Définition. Une **onde plane** est une onde dont les surfaces d'ondes sont des plans orthogonaux à une direction fixe \vec{u} . On note \vec{r} le vecteur position.

Une onde plane **progressive** dans la direction \vec{u} a des composantes X_i de la forme $f_i(\vec{u} \cdot \vec{r} - ct)$ (la fonction est a priori différente pour chaque composante). Ce type de solution correspond à une propagation dans la direction \vec{u} , à la vitesse c , sans déformation.



Propriété. Dans le vide, un champ électromagnétique se propageant le long de la direction fixe \vec{u} est la somme de deux ondes planes progressives se propageant dans les directions \vec{u} et $-\vec{u}$.

Rappel de première année sur l'onde progressive : Une **onde progressive** est une perturbation qui se propage sans transport de matière dans un milieu en restant identique à elle-même. Elle se retrouve à l'identique un peu plus loin un peu plus tard.

Une onde progressive unidimensionnelle s'écrit toujours sous la forme $f(SM - ct)$ avec SM la distance (positive) entre la source S et le point d'observation M , t le temps nécessaire au parcours de la distance SM , f la fonction décrivant la perturbation et c la célérité de l'onde.

En particulier, si on note x la distance algébrique SM représentée sur un axe orienté de gauche à droite, on a

- ▷ $h(x - ct)$ si l'onde se propage vers les x croissants (avec M à droite de S et $SM = +x > 0$) et avec h la fonction décrivant la perturbation ;
- ▷ $g(x + ct)$ si l'onde se propage vers les x décroissants (avec M à gauche de S , soit $SM = -x > 0$) et avec g la fonction décrivant la perturbation.

Et les ondes non planes ?

Une onde quelconque proche de ses sources n'est pas plane. La structure de celle-ci peut être complexe et dépend fortement des sources. Toutefois, à suffisamment « grande distance », les variations spatiales des surfaces d'ondes seront bien souvent négligeables et les surfaces d'ondes pourront être assimilées à leur plan tangent. Dans ce cas, le modèle de l'onde plane permet de décrire convenablement les phénomènes. On parle d'onde localement plane.

La notion de « grande distance » est volontairement floue. En général, il faut que la distance entre les sources et le point d'observation soit très grande devant l'étendue spatiale des sources ainsi que la longueur d'onde. Ces approximations sont rapidement vérifiées pour des ondes électromagnétiques.

1.3 L'onde plane progressive monochromatique

Définition. Une onde plane progressive monochromatique (OPPM), aussi appelée onde plane harmonique (OPPH), se propageant selon la direction \vec{u} s'écrit

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_E) = \Re \left(\underline{\vec{E}}_0 \exp \left[j \left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} \right) \right] \right)$$

et

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_B) = \Re \left(\underline{\vec{B}}_0 \exp \left[j \left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} \right) \right] \right)$$

avec ω la pulsation de l'onde. On appelle le **vecteur d'onde** $\vec{k} = k\vec{u}$ et $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ avec λ la longueur d'onde.

⚠⚠⚠ **Attention !** L'OPPM est un outil de calcul. Elle n'existe pas en réalité car elle porte une densité volumique d'énergie uniforme sur tout l'espace, soit une énergie infinie par intégration !

Une onde quelconque est, par le théorème de Fourier, une somme d'OPPM. On considère un **paquet d'ondes**, qui s'écrit :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\vec{E}}_0(k) \exp \left[j \left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} \right) \right] dk,$$

avec $\underline{\vec{E}}_0(k)$ une fonction généralement de norme unitaire, dont les composantes sont liés au **spectre** (voir figure 1). Ce paquet d'onde est toujours une onde plane progressive comme somme d'ondes planes progressives.

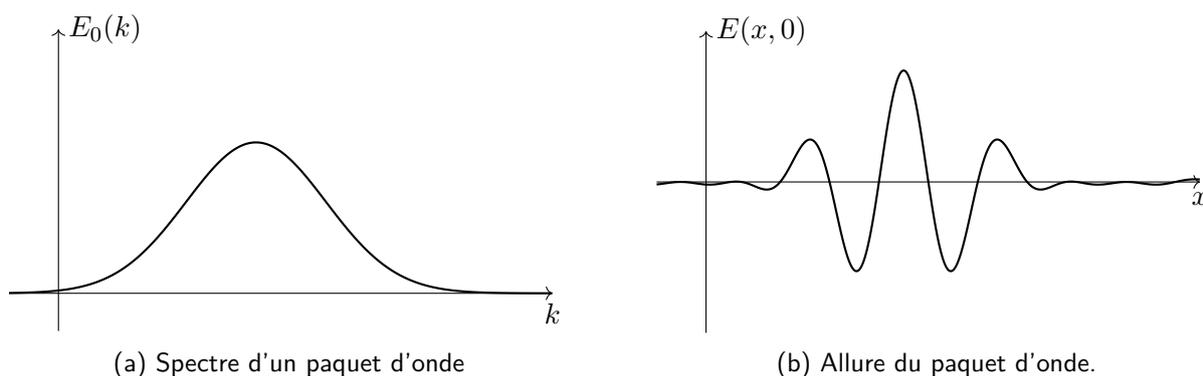


Fig. 1 – Allure d'un paquet d'onde et spectre correspondant pour $t = 0$.

1.4 Structure de l'onde plane progressive harmonique

1.4.1 Outils de calculs complexes :

Pour étudier les OPPM, on utilise les notations complexes avant de revenir au champ en prenant la partie réelle. Prenons donc un champ électrique ou magnétique de la forme

$$\underline{\vec{A}}(\vec{r}, t) = \underline{\vec{A}}_0 \exp \left[j \left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} \right) \right] = \underline{\vec{A}}_0 \exp \left[j \left(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z \right) \right].$$

Ainsi,

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = -j(\underline{A_{0,x}}k_x + \underline{A_{0,y}}k_y + \underline{A_{0,z}}k_z) \exp[j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})].$$

Propriété. Pour une OPPM de la forme $\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 \exp[j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$, on a

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{A} = -j\vec{k} \cdot \vec{A}}.$$

☞☞☞ **Attention !** Pour une OPPM de la forme $\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 \exp[j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$, on a

$$\operatorname{div} \vec{A} = +j\vec{k} \cdot \vec{A}.$$

On rappelle l'expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} = -j \begin{pmatrix} \underline{A_{0,z}}k_y - \underline{A_{0,y}}k_z \\ \underline{A_{0,x}}k_z - \underline{A_{0,z}}k_x \\ \underline{A_{0,y}}k_x - \underline{A_{0,x}}k_y \end{pmatrix} \exp[j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})] = -j\vec{k} \wedge \vec{A}.$$

Propriété. Pour une OPPM de la forme $\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 \exp[j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$, on a

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{A} = -j\vec{k} \wedge \vec{A}}.$$

☞☞☞ **Attention !** Pour une OPPM de la forme $\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 \exp[j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$, on a

$$\operatorname{rot} \vec{A} = +j\vec{k} \wedge \vec{A}.$$

1.4.2 Application aux équations de Maxwell :

Prenons des champs sous forme d'OPPM notés $\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 \exp[j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$, il vient

$$\begin{aligned} -j\vec{k} \cdot \vec{B} &= 0, \\ -j\vec{k} \wedge \vec{B} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = j\omega \mu_0 \varepsilon_0 \vec{E}, \\ -j\vec{k} \cdot \vec{E} &= 0, \\ -j\vec{k} \wedge \vec{E} &= -j\omega \vec{B}. \end{aligned}$$

Le vecteur d'onde étant réel, on peut prendre la partie réelle de ces relations sans les modifier.

Propriété. Un champ électromagnétique sous forme d'OPPM se propageant selon le vecteur d'onde \vec{k} dans le vide est **transverse**, les champs sont orthogonaux à la direction de propagation car $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$ et $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$.

Les champs électriques et magnétiques vérifient la **relation de structure**

$$\boxed{\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}}.$$

Les vecteurs $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ constituent un **trièdre de vecteurs orthogonaux orientés de façon directe**.

Comme les vecteurs sont orthogonaux entre eux, on en déduit la relation en norme $\boxed{k|\vec{E}| = \omega|\vec{B}|}$.

Remarque : L'orientation directe fait référence à la règle de la main droite. Si \vec{k} est le pouce de la main droite, alors \vec{E} est orienté par l'index et \vec{B} par le majeur de la même main.

Remarque : Une onde **longitudinale** est une onde qui oscille le long du vecteur de propagation.

Ces relations sont à savoir redémontrer et elles ne dépendent pas de la convention d'écriture des champs.

1.5 Relation de dispersion

En première année, nous avons défini la **vitesse de phase** correspondant à la vitesse de propagation d'une phase, soit d'une OPPM.

Définition. La **vitesse de phase** est la vitesse de propagation de la phase d'une OPPM, soit $v_\phi = \frac{\omega}{k}$.

Prenons une OPPM s'écrivant $\vec{E}(\vec{r}, t) = \underline{\vec{E}}_0 \exp[j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_E)]$, il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) &= -k_y^2 \underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) & , & & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) &= -k_z^2 \underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) , \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) &= -k_x^2 \underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) & \text{ et } & & \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) &= -\omega^2 \underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) . \end{aligned}$$

En utilisant cette propriété dans l'équation de d'Alembert, il vient $(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)c^2 = k^2 c^2 = \omega^2$.

Cette relation peut se retrouver sans utiliser l'équation de d'Alembert. En effet, on peut utiliser la relation vectorielle

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} . \quad (1.5)$$

Il vient en utilisant les relations de Maxwell sur l'OPPM

$$-\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \underline{\vec{E}} = \vec{k} \wedge (\omega \underline{\vec{B}}) = \vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}) = (\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}})\vec{k} - (\vec{k} \cdot \vec{k})\underline{\vec{E}} = -k^2 \underline{\vec{E}} .$$

Définition. On appelle **relation de dispersion** d'un milieu la relation entre la pulsation ω et le nombre d'onde k d'une OPPM se propageant dans ce milieu.

Dans le vide, on a $\omega = kc$. On en déduit que pour une OPPM, la relation de structure entre les normes des vecteurs $|\underline{\vec{E}}| = c|\underline{\vec{B}}|$.

On ne garde que la valeur positive de k dans le cas d'une propagation vers les x croissants.

Propriété. Dans le vide pour une onde électromagnétique, on a $v_\phi = c$. Toutes les OPPM se propagent à la même vitesse. Ainsi, tout paquet d'onde se propage à la vitesse c sans se déformer. Le vide est **non dispersif**.

1.6 Aspects énergétiques de l'OPPM

Il est nécessaire de calculer le vecteur de Poynting. Pour cela, il est nécessaire de calculer des produits de champs. Or on sait que $\Re(z_1 z_2) \neq \Re(z_1)\Re(z_2)$. Il est donc impossible de prendre les champs complexes puis la partie réelle de leur produit pour espérer obtenir le produit des parties réelles des champs.

Propriété.  **Attention !** Les notations complexes ne doivent pas être utilisées directement pour calculer le vecteur de Poynting. Pour un calcul explicite, il est nécessaire de revenir aux champs réels.

On peut utiliser la relation de structure qui reste vérifiée. Il vient donc en utilisant la propriété (1.5),

$$\vec{\Pi}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) \wedge \underline{\vec{B}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0 \omega} \underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) \wedge (\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}(\vec{r}, t)) = \frac{1}{\mu_0 \omega} \underline{\vec{E}}^2(\vec{r}, t) \vec{k} .$$

Propriété. Le vecteur de Poynting d'une OPPM de vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{u}$ dans le vide s'exprime

$$\vec{\Pi}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0 c} E^2(\vec{r}, t) \vec{u} = \frac{c}{\mu_0} B^2(\vec{r}, t) \vec{u}$$

avec $E(\vec{r}, t)$ la norme du champ $\underline{\vec{E}}(\vec{r}, t)$ et $B(\vec{r}, t)$ la norme du champ $\underline{\vec{B}}(\vec{r}, t)$.

Interprétation : Dans le cas d'une OPPM, on note $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_E)$ et $\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_B)$. Pour calculer la densité volumique d'énergie, on utilise les relations précédentes entre les normes des champs $|\vec{E}_0| = c|\vec{B}_0|$, on a, en utilisant la relation $\langle E^2 \rangle = \frac{1}{2} \Re(\underline{E} \underline{E}^*)$,

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \Re \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}_0^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}_0^2 \right) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 |\vec{E}_0|^2 .$$

L'énergie d'une onde plan est équirépartie entre les contributions électriques et magnétiques.

On peut donc écrire, avec $\vec{k} = k\vec{u}$,

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0\omega} |\vec{E}_0|^2 \vec{k} = \frac{k}{2\mu_0\omega} |\vec{E}_0|^2 \vec{u} = \frac{\varepsilon_0 c}{2} |\vec{E}_0|^2 \vec{u} = \langle w \rangle c \vec{u} .$$

Considérons un volume infinitésimal construit comme un tube de champ de surface transverse S de longueur $d\ell$. L'énergie moyenne contenue dans ce volume vaut $\langle dU \rangle = \langle w \rangle S d\ell = \langle w \rangle S c dt = \langle \Pi \rangle S dt$ avec dt le temps nécessaire à la lumière pour parcourir la distance $d\ell$. Ainsi, l'énergie contenue dans ce volume correspond à l'énergie sortante portée par les photons pendant le temps dt .

Remarque : En régime stationnaire, cette énergie perdue est compensée par l'énergie entrante à l'autre extrémité du volume élémentaire.

En effet, rappelons que l'onde électromagnétique correspond à la fonction d'onde quantique des photons qui portent l'énergie $h\nu$ avec h la constante de Planck et ν la fréquence de l'onde.

Ainsi, on peut écrire la variation d'énergie $\langle w \rangle S c = \left\langle \frac{dU}{dt} \right\rangle = h\nu \frac{dN}{dt}$ avec $\frac{dN}{dt}$ le nombre moyen de photons sortants par seconde.

Quelques ordres de grandeurs : L'éclairement correspond à la norme du vecteur de Poynting. Quelques chiffres pour se fixer les idées :

- ▷ l'éclairement solaire au sommet de l'atmosphère terrestre (constante solaire) est de $1360.8 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. Cette puissance par unité de surface au sol est de l'ordre de $1000 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ à midi solaire. En ordre de grandeur, cela correspond à un champ électrique de l'ordre de quelques centaines de V/m. L'effet d'une simple loupe permet d'atteindre un éclairement presque mille fois supérieur, égal à environ $1 \text{ MW} \cdot \text{m}^{-2}$ ou, dans une unité plus pratique, $100 \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$. Il est capable d'enflammer un papier ou un corps organique fin et sec ;
- ▷ un banal stylo laser émet un flux lumineux cohérent d'environ 1 mW par une fine section circulaire de 2 mm de diamètre. Ce flux de photons peut être dangereusement focalisé par le récepteur oculaire performant qu'est l'œil humain en un point de 10 μm de diamètre, ce qui représente 167 fois la vision directe du Soleil ;
- ▷ un bistouri laser au CO_2 , émettant à une longueur d'onde infrarouge de 10.6 μm , éclaire entre 5 et 50 $\text{mW} \cdot \text{mm}^{-2}$, ce qui est suffisant pour découper en la chauffant légèrement une tranche de chair.

1.7 Polarisation des ondes planes

Considérons un champ \vec{E} décrit par une onde plane dans le vide se propageant selon le vecteur \vec{k} . Pour se fixer les idées, on pose $\vec{k} = k\vec{e}_z$. Ce choix ne perd en rien la généralité du problème quitte à opérer une rotation du repère. Le vecteur \vec{E} est orthogonal à \vec{k} , on peut donc l'écrire

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \left(\underline{E}_x \vec{e}_x + \underline{E}_y \vec{e}_y \right) \exp [j (\omega t - kz)] .$$

Plaçons nous à $z = 0$ fixé et repassons en réel. Quitte à modifier l'origine des temps, on peut supposer que la composante selon \vec{e}_x est de phase à l'origine nulle. On a donc

$$\vec{E}(0, t) = E_1 \cos(\omega t) \vec{e}_x + E_2 \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y .$$

Définition. La **polarisation** est une propriété qu'ont les ondes vectorielles (ondes qui peuvent osciller selon plus d'une orientation) de présenter une répartition privilégiée de l'orientation des vibrations qui les composent.

En pratique, la polarisation décrit le mouvement du champ \vec{E} dans un plan fixé en fonction du temps.

Dans le cas $\varphi = 0$, les composantes $E_x(t)$ et $E_y(t)$ sont proportionnelles, on parle de polarisation **rectiligne**.

Dans le cas $\varphi = \pm\pi/2$ et $E_1 = E_2$, on reconnaît l'équation paramétrique d'un cercle, on parle de polarisation **circulaire** qualifiée de « droite » (sens horaire) ou « gauche » (sens trigonométrique) selon le sens de rotation.

Dans le cas général, on parle de polarisation **elliptique** pouvant être « droite » (sens horaire) ou « gauche » (sens trigonométrique) selon le sens de rotation.

Pour visualiser et manipuler ces différents états de polarisation, il est indispensable de manipuler [l'animation de la référence](#) [1]. On constate que l'on peut construire n'importe quel état de polarisation en sommant deux polarisations rectilignes orthogonales ou deux polarisations circulaires de sens contraire.

Applications : La lumière naturelle n'a pas d'état de polarisation stable. En effet, à cause de déphasage aléatoire entre les composantes du champs, l'état de polarisation varie en permanence. Elle n'est donc pas polarisée.

La polarisation peut s'observer à l'aide de matériaux polariseurs. Il s'agit de matériaux qui, par leur structure interne, absorbent une direction de polarisation et laissent passer une autre. C'est le cas des lunettes 3D utilisées au cinéma. Chaque verre laisse passer une direction de polarisation différente. Ainsi, si deux images différentes sont portées par des champs électriques de polarisation différentes, l'utilisation de ces lunettes permet de voir une image différente sur chaque œil, d'où l'illusion 3D.

À titre d'exemple, certaines lumières artificielles sont polarisées, comme la lumière produite par les écrans électroniques.

2 Propagation dans un conducteur ohmique

La propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu matériel est un problème a priori particulièrement compliqué, puisqu'il faut tenir compte du champ généré en retour par les charges du milieu. Les métaux ne font pas exception.

2.1 Électroneutralité du conducteur et ARQS magnétique

Le passage du champ électrique dans le conducteur met en mouvement les charges électriques présentes. Nous cherchons à estimer qualitativement cette mise en mouvement dans ce cadre.

Considérons donc un conducteur ohmique vérifiant la loi de Joule locale

$$\vec{j} = \underline{\sigma}(\omega)\vec{E}$$

avec la conductivité complexe du matériau $\underline{\sigma}(\omega) = \frac{\sigma_0}{j\omega\tau + 1}$.

De plus, en écrivant l'équation de conservation de la charge en notations complexes et en utilisant l'équation de Maxwell-Gauss, il vient

$$j\omega\rho = -\operatorname{div}\vec{j} = -\frac{\sigma_0}{j\omega\tau + 1}\operatorname{div}\vec{E} = -\frac{1}{j\omega\tau + 1}\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\rho.$$

En revenant en notation réelles, on arrive à l'équation différentielle

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{d\rho}{dt} + \frac{\sigma_0}{\tau\varepsilon_0}\rho = 0.$$

On rappelle les ordres de grandeurs typiques pour le cuivre $\tau \sim 10^{-14}$ s et $\sigma_0 \sim 6 \times 10^7$ S/m. De plus, la permittivité diélectrique du vide vaut $\varepsilon_0 \approx 8.8 \times 10^{-12}$ F · m⁻¹. On en déduit le discriminant du polynôme caractéristique

$$\Delta = \frac{1}{\tau^2} - 4\frac{\sigma_0}{\tau\varepsilon_0} \approx -4\frac{\sigma_0}{\tau\varepsilon_0} < 0.$$

Les solutions du polynôme caractéristique sont donc

$$r_{\pm} = -\frac{1}{2\tau} \pm j\frac{1}{2}\sqrt{-\Delta}.$$

Le charge $\rho(t)$ est donc une solution pseudo-périodique. Il s'agit d'une fonction sinusoïdale exponentiellement amortie. Le temps caractéristique de décroissance de l'exponentielle sera de 2τ tandis que la pseudo-pulsation vaut $\frac{1}{2}\sqrt{-\Delta}$.

Ainsi, en l'espace de 10^{-14} s, la densité de charge ρ retourne à zéro après le passage d'un champ électrique exciteur.

Propriété. Pour des fréquences inférieure à 10^{14} Hz, un conducteur ohmique peut être considéré comme électriquement neutre après le passage d'un champ électrique, soit $\rho = 0$.

Pour la suite de cette étude, nous nous plaçons dans cette hypothèse de fréquence, ce qui permet d'ailleurs de simplifier la conductivité électrique $\underline{\sigma} \approx \sigma_0$.

De plus, comme vu dans le chapitre précédent, ces fréquences représentant la gamme décrivant l'ARQS magnétique est respectée et le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction.

Dans ce cadre, on simplifie les équations de Maxwell-Gauss et de Maxwell-Ampère dans le conducteur

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \sigma_0 \vec{E}.$$

2.2 L'effet de peau

2.2.1 Équation de diffusion

Reprenons l'équation de Maxwell-Faraday, on a

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{soit} \quad \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{B}) = -\mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

où on a utilisé le théorème de Schwarz pour inverser les dérivées temporelles et spatiales. En reprenant la définition du Laplacien vectoriel, on trouve l'équation vérifiée par le champ \vec{E} .

Propriété. Dans un conducteur ohmique de conductivité statique σ_0 dans l'ARQS magnétique, le champ électrique vérifie l'équation de diffusion

$$\vec{\Delta} \vec{E} = \mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Il s'agit d'une équation de diffusion car chaque coordonnée du champ vérifie une équation de type diffusion rencontrée dans l'étude de la conductivité thermique.

Avant de chercher sa solution dans le cas qui nous intéresse remarquons que, du point de vue qualitatif, la variation du champ électromagnétique est totalement différente de celle obtenue par l'équation de d'Alembert : notamment, le terme temporel suggère une dynamique *dissipative*, qui empêchera la propagation du champ à l'intérieur du métal sur de longues distances.

En effet, l'équation de d'Alembert est invariante par inversion du temps (transformation $t \rightarrow -t$) alors que ce n'est pas le cas de l'équation de diffusion.

2.2.2 Champ électrique

On considère une interface plane infinie Oyz séparant le vide d'un conducteur ohmique de conductivité σ . Le conducteur occupe demi-espace $x \geq 0$ et le demi-espace $x < 0$ est occupé par le vide. On considère un champ électrique incident sur l'interface de la forme

$$\vec{E} = E_0 \underline{f}(x) e^{j\omega t} \vec{e}_z$$

et on recherche l'expression de \underline{f} pour $x > 0$.

Il vient alors l'équation sur f

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = j\omega \mu_0 \sigma_0 \underline{f}.$$

Les solutions de cette équations complexe sont de la forme

$$\underline{f}(x) = \underline{A}e^{kx} + \underline{B}e^{-kx}$$

avec

$$\underline{k}^2 = j\omega\mu_0\sigma_0 \quad \Rightarrow \quad \underline{k} = \frac{(1+j)}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\mu_0\sigma_0}$$

avec $j = \exp\left[j\frac{\pi}{2}\right]$ et donc $j^{1/2} = \pm \exp\left[j\frac{\pi}{4}\right] = \pm \frac{(1+j)}{\sqrt{2}}$.

On pose l'épaisseur de peau $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma_0}}$ homogène à une distance. On peut donc écrire

$$\underline{f}(x) = \underline{A} \exp\left[\frac{x}{\delta} + j\frac{x}{\delta}\right] + \underline{B} \exp\left[-\frac{x}{\delta} - j\frac{x}{\delta}\right].$$

On déduit de ce résultat que $A = 0$ car le champ ne peut pas diverger dans le conducteur lorsque x tend vers l'infini. Pour déterminer B , on admet que le champ électrique est continu.

Remarque : En réalité, la continuité du champ électrique n'est pas vraie en générale, seules les composantes parallèles à la surface de l'interface sont continues. Ce qui est le cas ici par choix de l'onde incidente.

Propriété. Le champ électrique dans un conducteur ohmique dans l'ARQS magnétique est donné par

$$\vec{E}(x, t) = E_0 e^{-x/\delta} \exp\left[j\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right] \vec{e}_z.$$

L'onde est exponentiellement amortie en entrant dans le conducteur. Il s'agit de l'**effet de peau**.

La distance caractéristique d'atténuation de l'onde est appelée **épaisseur ou profondeur de peau**

$$\delta(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma_0}}.$$

La propagation d'une onde est assurée par la partie réelle du nombre d'onde. La partie imaginaire impose une variation de l'amplitude de l'onde.

L'épaisseur de peau décroît avec le produit $\sigma_0\omega$: plus la fréquence est élevée, moins le champ électromagnétique peut pénétrer dans le métal. De même, plus le métal est bon conducteur, plus les charges qu'il contient peuvent se réarranger rapidement pour produire un champ électromagnétique en retour qui écranter efficacement le champ incident. Typiquement, pour du cuivre $\sigma_0 \simeq 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$, et l'épaisseur de peau vaut une dizaine de mm à 50 Hz, et une cinquantaine de microns à 1 MHz.

Le champ électrique **n'est pas une onde progressive**. En effet, la forme de l'onde n'est pas à l'identique un un peu plus loin et un peu plus tard. La vitesse de propagation de cette onde est la vitesse de phase $v_\phi = \frac{\omega}{\Re(\underline{k})}$.

2.3 Aspects énergétiques

Calcul du champ magnétique : On utilise l'équation de Maxwell-Faraday

$$\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = -\text{rot} \underline{E} = E_0 \underline{f}'(x) e^{j\omega t} \vec{e}_y$$

soit

$$\underline{B} = \frac{E_0 \underline{f}'}{j\omega} e^{j\omega t} \vec{e}_y = \frac{-E_0(1+j)}{j\delta\omega} e^{-x/\delta} \exp\left[j\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right] \vec{e}_y$$

où on a pris la constante d'intégration nulle car elle conduit à un champ statique sur tout le demi-espace $x > 0$. Or un tel champ porterait une énergie infinie ce qui n'est pas acceptable.

Valeur moyenne et notation complexe : La **valeur moyenne** d'une grandeur physique dépendant du temps $X(t)$ s'écrit :

$$\langle X \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T X(t) dt.$$

Si X est périodique, on retrouve l'expression

$$\langle X \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt.$$

Considérons deux champs harmoniques $X(\vec{r}, t)$ et $Y(\vec{r}, t)$ de même pulsation s'écrivant, en notation complexe :

$$\underline{X}(\vec{r}, t) = X_0(\vec{r})e^{j\omega t} \text{ et } \underline{Y}(\vec{r}, t) = Y_0(\vec{r})e^{j(\omega t + \varphi)}.$$

Le produit des grandeurs réelles vaut $X(t)Y(t) = X_0Y_0 \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi)$. Or on rappelle que la valeur moyenne

$$\langle \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi) \rangle = \langle \cos^2 \omega t \rangle \cos \varphi - \langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle \sin \varphi = \frac{\cos \varphi}{2} \langle 1 + \cos(2\omega t) \rangle = \frac{\cos \varphi}{2}$$

car $\langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle = \langle \cos(2\omega t) \rangle = 0$.

Propriété. Considérons deux champs harmoniques $X(\vec{r}, t)$ et $Y(\vec{r}, t)$ de même pulsation, alors

$$\langle XY \rangle = \frac{1}{2} \Re(X^* Y) = \frac{1}{2} \Re(XY^*).$$

Remarque : La notation z^* correspond au nombre complexe conjugué de z .

Ce résultat permet de donner immédiatement l'expression de la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting et de la puissance Joule :

Propriété. Pour un champ électromagnétique de la forme $(\underline{\vec{E}}(\vec{r})e^{j\omega t}, \underline{\vec{B}}(\vec{r})e^{j\omega t})$, on trouve le **vecteur de Poynting moyen** :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \Re \left(\frac{\underline{\vec{E}}^* \wedge \underline{\vec{B}}}{\mu_0} \right).$$

Calcul du vecteur de Poynting : On calcule la valeur moyenne du vecteur de Poynting en utilisant les notations complexes

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \Re \left(\underline{\vec{E}}^* \wedge \underline{\vec{B}} \right) = \frac{E_0^2}{2\mu_0 \delta \omega} e^{-2x/\delta} \Re(j(1+j)) \vec{e}_x = -\frac{E_0^2}{2\mu_0 \delta \omega} e^{-2x/\delta} \vec{e}_x.$$

L'énergie transportée est exponentiellement amortie et est donc nulle à l'infini. Cette énergie est transmise progressivement à la matière.

En particulier, la norme du vecteur de Poynting prise en $x = 0$ permet de quantifier la puissance sortante par unité de surface dans le conducteur, soit $-\frac{E_0^2}{2\mu_0 \delta \omega}$, ce qui permet d'obtenir la puissance entrante par unité de surface en prenant l'opposé.

Remarque : Un regard attentif permet de constater que cette expression n'est pas égale à celle du vecteur de Poynting dans le vide apportée par l'onde plane incidente. On verra plus tard qu'en réalité, une partie de l'onde est réfléchie et donc une partie de l'énergie de l'onde incidente est portée par cette onde réfléchie.

Calcul de la densité d'énergie électromagnétique : On a

$$\langle w_E \rangle = \frac{\varepsilon_0}{4} \Re \left(\vec{E}^* \cdot \vec{E} \right) = \frac{\varepsilon_0}{4} E_0^2 e^{-2x/\delta}$$

et

$$\langle w_B \rangle = \frac{1}{4\mu_0} \Re \left(\vec{B}^* \cdot \vec{B} \right) = \frac{1}{2\mu_0 \delta^2 \omega^2} E_0^2 e^{-2x/\delta}.$$

On constate, en utilisant l'expression de δ , que

$$\frac{\langle w_E \rangle}{\langle w_B \rangle} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0 \delta^2 \omega^2}{2} = \frac{c^2 \omega}{\mu_0 \sigma_0} = \frac{\varepsilon_0 \omega}{\sigma_0} \ll 1.$$

Le rapport entre les contributions électrique et magnétique à la densité d'énergie électromagnétique est égal à celui entre les courants de déplacement et de conduction : ce rapport est très faible devant 1 pour un bon conducteur dans un régime basse fréquence. L'énergie est donc essentiellement sous forme magnétique dans le conducteur. On retrouve la définition de l'ARQS magnétique.

Puissance cédée aux charges libres : La puissance Joule par unité de volume s'écrit

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \sigma_0 \vec{E}^2 = \sigma_0 E_0^2 e^{-2x/\delta} \cos^2(x/\delta - \omega t).$$

La valeur moyenne temporelle de l'expression précédente s'écrit

$$\left\langle \frac{d\mathcal{P}}{d\tau} \right\rangle = \frac{\sigma_0 E_0^2}{2} e^{-2x/\delta},$$

et son intégration le long de l'axe x et infiniment étendu selon (Ox) vaut la puissance surfacique

$$\langle \mathcal{P}_S \rangle = \frac{\sigma_0 E_0^2}{2} \int_0^{+\infty} dx e^{-2x/\delta} = \frac{\sigma_0 E_0^2 \delta}{4} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 \delta \omega},$$

où on a utilisé la définition de l'épaisseur de peau $\frac{\sigma_0 \delta}{2} = \frac{1}{\mu_0 \delta \omega}$.

On retrouve que cette puissance surfacique Joule dissipée dans le demi-espace $x \geq 0$ occupé par le conducteur est égale à la puissance entrante dans le conducteur. La puissance incidente est donc entièrement dissipée par effet Joule.

3 Propagation d'une onde transverse dans un plasma dilué

Un plasma est un gaz ionisé dans lequel les électrons et les ions associés sont libres de se déplacer. C'est un milieu désordonné (au même sens qu'un gaz), conducteur, globalement neutre, et qui apparaît dans des conditions extrêmes de température, ou de champ électrique. Ces conditions peuvent être réunies dans la nature (dans les plasmas astrophysiques, l'ionosphère, ou les éclairs par exemple) ou provoquées artificiellement (dans les téléviseurs, les lampes à décharge ou en vue de réaliser la fusion nucléaire dans un réacteur Tokamak).

L'ionosphère est une couche de la haute atmosphère située entre 75 et 250 km d'altitude ionisée par les rayons cosmiques et le vent solaire. C'est un plasma faiblement ionisé dans sa couche basse (le rapport entre la densité d'électrons libres et la densité totale est petit devant 1), et fortement ionisé dans sa couche supérieure. Dans toute la suite, on considèrera des perturbations proches de l'état d'équilibre, dans lequel le plasma est localement neutre.

3.1 Propagation dans un plasma

3.1.1 Densité de courant

Les ions étant significativement plus lourds que les électrons qui les entourent, on néglige le plus souvent leur contribution à la densité de courant totale. De plus, en l'absence de champ magnétique imposé par l'extérieur, la contribution du champ magnétique à la force de Lorentz est négligée.

En effet, en ordre de grandeur, on suppose que le champ magnétique est de l'ordre de celui donné par le relation de structure soit $B \sim E/c$. Ainsi, la contribution de la force de Lorentz vaut $Ev/c \ll 1$ en hypothèse non relativiste.

L'onde électromagnétique impose localement une oscillation des électrons à sa fréquence. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à un électron conduit à

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m_e}{\tau} \vec{v}$$

où la force de frottement fluide traduit les effets collectifs des charges entre elles, effets collectifs qui tendent à ramener le plasma vers son état d'équilibre (cf le modèle de Drude du chapitre EM2). Le temps τ représente le temps caractéristique de dissipation du modèle. Soit en notation complexe, il vient

$$\vec{v} = \frac{-e\tau/m_e}{1 + j\omega\tau} \vec{E}.$$

On en déduit donc l'écriture du vecteur densité de courant $\vec{j} = -en\vec{v}$, et enfin celle de la conductivité à haute fréquence, également en notation complexe

$$\sigma(\omega) = -j \frac{ne^2}{m_e\omega},$$

où n est la densité d'électrons.

L'hypothèse $\omega\tau \gg 1$ revient donc à négliger la dissipation, ce qui s'avère raisonnable en pratique dans le cas d'un plasma peu dense. On remarque notamment que puisque la conductivité est imaginaire pure, la puissance volumique moyennée sur une période sera nulle. Dans cette limite, la puissance moyenne cédée par l'onde au plasma s'annule, en accord avec l'hypothèse d'une dissipation négligeable.

3.1.2 Équation de propagation

On restreint l'étude aux ondes transverses, soit lorsque le champ est orthogonal à la direction de propagation. Cela implique $\text{div} \vec{E} = 0$ pour ces ondes particulières, par exemple $\vec{E} = E_0 e^{j(\omega t - kx)} \vec{e}_y$. Autrement dit, même si une densité de charge électrique est présente dans le plasma, elle n'influe pas sur la propagation des ondes transverses étudiées.

Connaissant la relation entre le courant et le champ électrique, on trouve l'équation vérifiée par le champ électrique en utilisant les équations de Maxwell, par la méthode habituelle, soit

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{rot} \vec{E}) &= -\Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot} \vec{B}) \\ \Rightarrow \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}. \end{aligned}$$

On remplace le vecteur densité de courant par son expression et il vient

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -j \frac{ne^2}{m_e\omega} \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

3.1.3 Relation de dispersion

On suppose que le champ dans le plasma est de la forme $E_0 e^{j(\omega t - kx)} \vec{e}_y$, il vient alors

$$-k^2 E_0 e^{j(\omega t - kx)} + \frac{\omega^2}{c^2} E_0 e^{j(\omega t - kx)} = -j \frac{ne^2}{m_e\omega} \mu_0 j \omega E_0 e^{j(\omega t - kx)}$$

d'où la relation de dispersion

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{ne^2}{m_e} \mu_0.$$

Propriété. La relation de dispersion d'une onde transverse électrique dans un plasma peu dense s'écrit

$$k(\omega) = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}},$$

avec $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m}}$ la **pulsation plasma** au-dessous de laquelle on ne peut pas propager de signal dans l'ionosphère, puisque dans ce domaine de fréquence on vérifie $k^2 < 0$ (vecteur d'onde imaginaire pur, caractéristique d'une atténuation).

Ainsi, un signal de pulsation inférieure à ω_p sera réfléchi par l'ionosphère : ce phénomène, commun à tous les plasmas, est utilisé pour transmettre de l'information sur de longues distances. Pour la couche la plus basse de l'ionosphère, la fréquence plasma vaut $f_p = 9$ MHz.

L'allure de cette relation de dispersion est donnée dans la figure 2. L'inverse de la pulsation plasma donne un temps typique de réponse des électrons à une perturbation : en d'autres termes, $1/\omega_p$ détermine la période typique d'oscillation de la densité de charge. Le temps de retour à l'équilibre sera lui déterminé par l'échelle de temps τ qui caractérise la dissipation dans le plasma que nous avons négligé dans les calculs (cf. le paragraphe précédent sur l'effet de peau).

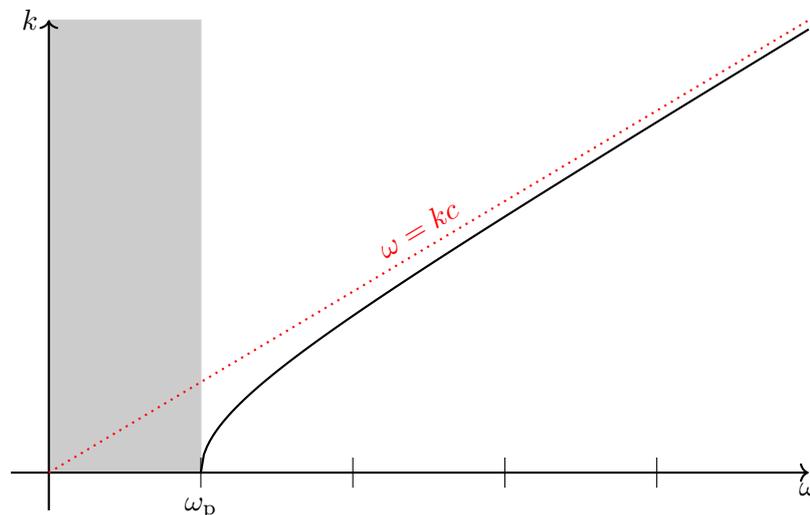


Fig. 2 – Relation de dispersion dans l'ionosphère. Au-dessous de la pulsation plasma ω_p (dans la zone grisée), le vecteur d'onde est imaginaire pur et l'onde est exponentiellement amortie : elle ne se propage donc plus, l'onde est qualifiée d'évanescence. Lorsque la pulsation vaut quelques ω_p , la relation de dispersion est approximativement linéaire, comme indiqué par la ligne pointillée rouge.

3.2 Déformation du paquet d'onde

3.2.1 Vitesse de phase

La vitesse de phase est la vitesse de propagation d'un onde plane. On a par définition

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}.$$

La vitesse de phase dépend de la pulsation, le milieu est donc dispersif. Chaque onde plane va à une vitesse différente. La dispersion trouve ici son origine dans la rétroaction du plasma à l'excitation provoquée par le passage de l'onde.

On constate de plus que $v_\phi > c$ ce qui semble contradictoire. En réalité, on rappelle qu'une onde plane n'a pas d'existence physique car, étant infinie, son énergie est infinie. On ne peut donc pas tirer d'informations de cette grandeur. Ce qui compte est la vitesse de propagation du paquet d'onde composé d'un grand nombre d'ondes planes.

3.2.2 Vitesse de groupe

Considérons un paquet d'onde de la forme

$$\vec{E}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_0(k) \exp[j(\omega(k)t - kx)] dk.$$

On suppose que le paquet d'onde est peu étendu spectralement, autrement dit $\vec{E}_0(k)$ n'est non nul qu'autour d'une valeur centrale k_0 sur une certaine étendue spectrale $\Delta k \ll k_0$ (cf chapitre de mécanique quantique pour plus de détails). On peut donc faire l'approximation, en posant $\omega_0 = \omega(k_0)$,

$$\omega(k) \approx \omega_0 + (k - k_0) \frac{d\omega}{dk}(k_0)$$

soit la phase

$$\omega(k)t - kx = \omega(k)t - (k - k_0)x - k_0x \approx (\omega_0 t - k_0x) + (k - k_0) \left(\frac{d\omega}{dk}(k_0)t - x \right).$$

Ainsi, on a

$$\vec{E}(x, t) \approx \exp[j(\omega_0 t - k_0x)] \vec{E} \left(\frac{d\omega}{dk}(k_0)t - x \right);$$

avec

$$\vec{E}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_0(k) \exp[j(k - k_0)u] dk$$

l'enveloppe de l'onde. On constate donc que le paquet d'onde est une onde plane incluse dans cette enveloppe qui module son amplitude. Or cette enveloppe est une fonction de $\frac{d\omega}{dk}(k_0)t - x$. Ainsi, l'enveloppe se translate de sorte à garder cette grandeur constante.

Le préfacteur dans l'expression du champ électrique fait apparaître explicitement la vitesse de phase $v_\phi = \omega(k_0)/k_0$, qu'on interprète alors simplement comme la vitesse à laquelle évolue la phase au cours de la propagation.

Définition. L'enveloppe du paquet d'onde se déplace à la **vitesse de groupe**

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}.$$

Cette vitesse est la vitesse de l'onde et de son énergie, soit la **vitesse de l'information**, elle est toujours inférieure à la vitesse de la lumière.

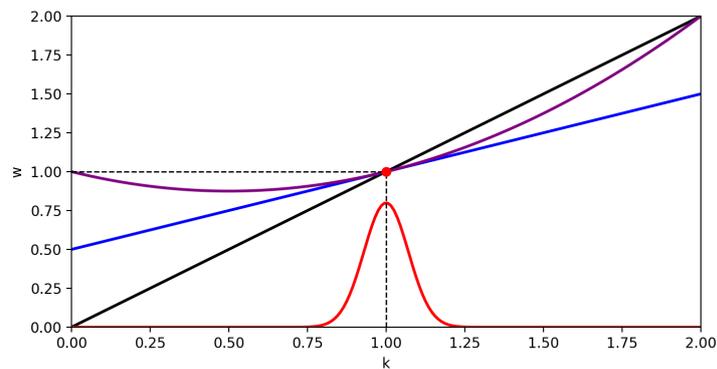
Dans le cas du plasma, on différencie la relation de conjugaison

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \quad \Longrightarrow \quad 2kdk = \frac{2\omega d\omega}{c^2} \quad \Longrightarrow \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = c^2 \frac{k}{\omega} = \frac{c^2}{v_\phi} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} < c.$$

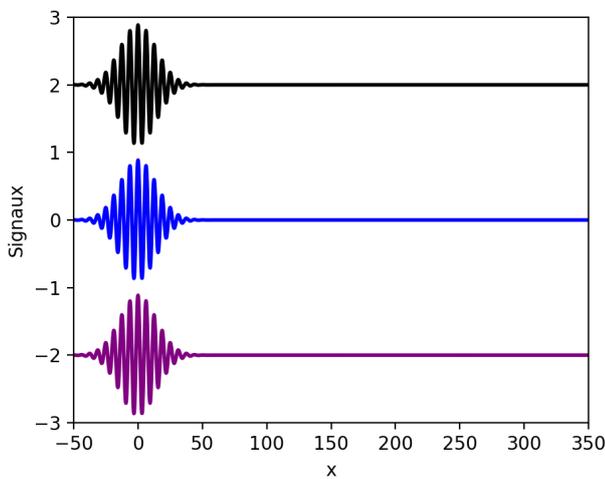
3.2.3 Déformation

Le raisonnement précédent implique que l'enveloppe du paquet d'onde se déplace identiquement à elle-même. Or, si le paquet d'onde est trop étalé, l'approximation du nombre d'onde proposée n'est plus adaptée. Si le maximum du paquet d'onde se déplace toujours à la vitesse de groupe, celui-ci se déforme significativement dans le temps dû à la dispersion.

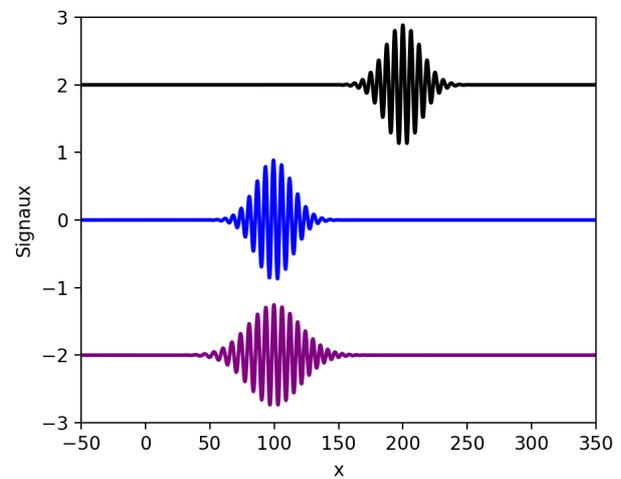
À titre d'exemple, plusieurs courbes issues d'une simulation sous python sont présentées figure 3.



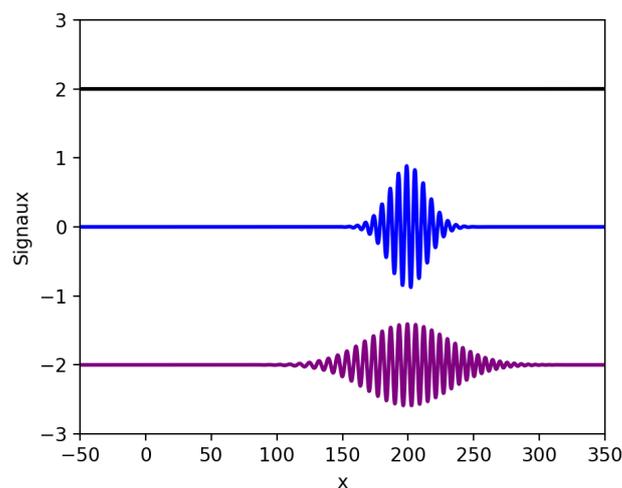
(a) Tracé de trois relations de dispersion : en noir un milieu non dispersif et en bleu et violet deux relations plus ou moins dispersives. La courbe rouge représente l'enveloppe initiale du paquet d'onde centrée en $k = 1$ (unités arbitraires). Pour les courbes bleue et violettes, la valeur de $\frac{d\omega}{dk}$ est la même en $k = 1$, ainsi elles ont la même vitesse de groupe et le maximum de leur paquet d'onde se propagera à la même vitesse. La relation de dispersion violette a des variations plus rapides que la bleue, elle est plus dispersive.



(b) Tracé des trois paquets d'onde au temps initial : ils sont identiques.



(c) Le paquet d'onde noir va plus vite que les deux autres qui ont la même vitesse de groupe.



(d) Après un temps long, le paquet d'onde violet est très déformé car il parcourt un milieu très dispersif.

Fig. 3 – Illustration de la déformation du paquet d'onde dû à la dispersion. La courbe 3a représente les relations de dispersions utilisées lors de la simulation. Les courbes suivantes représentent l'évolution à trois instants différents du même paquet d'onde (en unités arbitraires) dans trois milieux décrits par les relations de dispersion de la figure 3a.

4 Champ électromagnétique rayonné par un dipôle oscillant dans la zone de rayonnement

Jusqu'ici, l'accent a été mis sur les propriétés des ondes électromagnétiques, sans se préoccuper de leurs sources. L'objet de cette dernière partie est l'étude du rayonnement dipolaire, qui modélise l'émission d'ondes électromagnétiques par certains types d'antennes ou d'atomes.

4.1 Position et hypothèses du problème

On considère un dipôle de longueur a constitué de deux charges $\pm q$ et centré en O . Ce dipôle oscille à la pulsation ω : $\vec{p}(t) = p_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$ comme représenté figure 4, avec $p_0 = aq$.

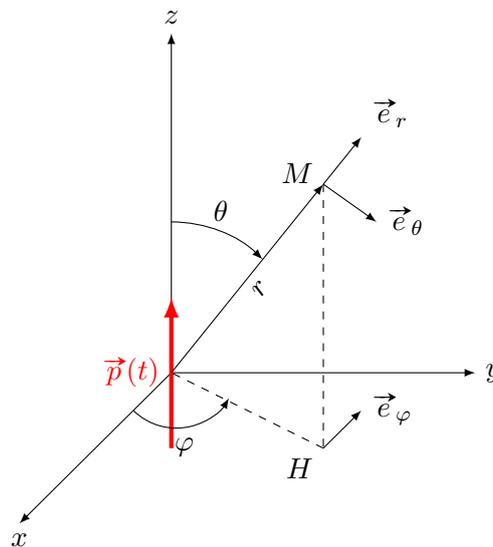


Fig. 4 – Notations utilisées pour décrire le dipôle rayonnant.

Ce modèle est à l'origine du fonctionnement des antennes dipolaires émettrices : on considère chaque élément de longueur métallique traversé par un courant variable comme un dipôle oscillant élémentaire ; le champ total créé est alors l'intégrale sur la longueur de l'antenne des champs générés par les dipôles élémentaires.

Il explique aussi le rayonnement des particules chargées accélérées, et se généralise par le modèle du rayonnement dipolaire électrique et celui du rayonnement dipolaire magnétique.

On se propose les hypothèses suivantes :

- ▷ on se place dans l'**approximation dipolaire** : on ne calculera le champ qu'en des points M très éloignés de O : $OM = r \gg a$;
- ▷ on se place dans l'**approximation non relativiste** : celle-ci revient à considérer que la vitesse typique de déplacement de la charge au niveau du dipôle af (avec f la fréquence est négligeable) devant la vitesse de la lumière soit $a \ll \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$;
- ▷ enfin, on se place dans la **zone de rayonnement**, pour laquelle $r \gg \lambda$.

On constate que ces hypothèses sont peu restrictives au vu des phénomènes modélisés.

Cet ensemble d'approximation permet d'écrire l'expression du champ électromagnétique en un point M de la zone de rayonnement :

$$\begin{aligned}\vec{E}(M, t) &= -\frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi r} \sin \theta \cos(\omega t - kr) \vec{e}_\theta \\ \vec{B}(M, t) &= -\frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi r c} \sin \theta \cos(\omega t - kr) \vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

On peut visualiser l'évolution spatio-temporelle du champ électrique à l'aide de [cette animation wikipedia](#) [2].

Remarque : La démonstration de ces expressions nécessite des outils hors programmes impossibles à établir simplement. Leurs expressions ne sont pas à connaître.

Propriété. On constate que le champ vérifie une structure **locale** d'une onde plane, soit

$$\vec{B}(M, t) = \frac{\vec{e}_r}{c} \wedge \vec{E}(M, t) .$$

Dimensionnellement, on a

$$\left[\frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{r} \right] = \frac{L[q]}{[\varepsilon_0 c^2] T^2 L} = \frac{[q]}{[\varepsilon_0] L^2}$$

ce qui correspond bien à la dimension d'un champ électrique selon la formule de Coulomb.

4.2 Bilan énergétique

Calculons le vecteur de Poynting, il vient

$$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{\vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t)}{\mu_0} = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{16\pi^2 r^2 c} \sin^2 \theta \cos^2(\omega t - kr) \vec{e}_r .$$

4.2.1 Indicatrice de rayonnement

Définition. Le **diagramme de rayonnement** (ou d'émission) est la représentation graphique de la distribution angulaire d'une grandeur caractérisant le rayonnement d'une antenne radioélectrique, et, par extension, cette répartition elle-même. La courbe de cette distribution est appelée **indicatrice de rayonnement**.

Pour le rayonnement d'un dipôle, le vecteur de Poynting étant radial, le diagramme de rayonnement correspond au tracé de la moyenne du module du vecteur de Poynting, soit le tracé de l'indicatrice de rayonnement représentée par la fonction polaire $\sin^2(\theta)$. Celle-ci est réalisée figure 5.

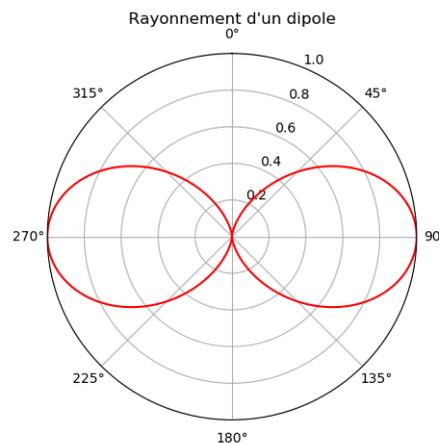


Fig. 5 – Indicatrice de rayonnement d'un dipôle rayonnant dans la zone de rayonnement.

Propriété. Un dipôle rayonnant, et par extension une antenne simple, ne rayonne pas d'énergie dans l'axe de celui-ci. La distribution de puissance rayonnée dépend de la direction, elle est **anisotrope**.

En positionnant plusieurs antennes judicieusement et en jouant sur leur longueur, il est possible d'affiner l'indicatrice de rayonnement pour régler précisément la directivité de l'énergie émise.

4.2.2 Puissance moyenne totale rayonnée

Pour calculer la puissance totale moyenne rayonnée, on intègre le flux du vecteur de Poynting sur une sphère de rayon r fixée, soit

$$\mathcal{P}_m = \left\langle \oiint \vec{\Pi}(M, t) \cdot \vec{dS} \right\rangle = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{16\pi^2 c} \langle \cos^2(\omega t - kr) \rangle \oiint \frac{\sin^2 \theta}{r^2} dS = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{32\pi^2 c} \oiint \frac{\sin^2 \theta}{r^2} dS .$$

On l'élément infinitésimal de surface d'une sphère vaut $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$. On calcule donc

$$\oint \frac{\sin^2 \theta}{r^2} dS = \oint \frac{\sin^3 \theta}{d} d\varphi = \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) \left(\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \right) = 2\pi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta .$$

Cette seconde intégrale se calcule directement grâce à la relation

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \int_0^\pi \sin \theta d\theta - \int_0^\pi \sin \theta \cos^2 \theta d\theta = [-\cos \theta]_0^\pi + \frac{1}{3} [\cos^3 \theta]_0^\pi = \frac{4}{3} .$$

Propriété. La puissance moyenne rayonnée par un dipôle est donnée par la formule de Larmor soit

$$\mathcal{P}_m = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{12\pi c} = \frac{\mu_0}{6\pi c} \langle \ddot{p}(t)^2 \rangle .$$

Toute charge accélérée rayonne de l'énergie.

On obtient une puissance indépendante de r , l'énergie est conservée à travers toutes les sphères, quel que soit leur rayon.

De plus, les hautes fréquences sont mieux rayonnées que les basses fréquences, ce qui explique en partie le fait que les antennes radio utilisent des fréquences plutôt élevées. À l'opposé, lorsque du courant électrique est transportée, de l'énergie est rayonnée à cause des charges électriques en mouvement, le fait d'utiliser des basses fréquences permet de limiter les pertes par rayonnement.

Remarque : Le fait d'utiliser des basses fréquences pour transporter le courant est aussi pour limiter l'effet de peau étudiée dans le paragraphe 2.2.

De plus, la lumière incidente sur les particules, comme celles de l'air par exemple, excitent celles-ci qui se comportent alors comme un dipôle rayonnant. La puissance rayonnée dépend alors de $1/\lambda^4$, ce qui implique que les courtes longueurs d'ondes sont plus rayonnées que les longues. Qualitativement, cela explique le fait que, lors de la traversée de l'atmosphère, le bleu est plus rayonné que le rouge. Corrélativement, la lumière incidente s'appauvrit en bleu et « tire » vers le rouge, ce qui explique la teinte du soleil couchant dont la lumière nous parvient après avoir traversé une grande épaisseur d'atmosphère, le bleu ayant été diffusé. Ce phénomène s'appelle la **diffusion Rayleigh**.

Références

- [1] https://emanim.szialab.org/index_fr.html
- [2] https://fr.wikipedia.org/wiki/Dipôle_oscillant